

Metaball 重叠区域作用效果混合

李凌丰 谭建荣 赵海霞

(浙江大学 CAD&CG 国家重点实验室, 杭州 310027)

摘要 在表现隐式曲面或曲面变形时,多个 Metaball 作用的重叠区域常会出现肿胀、褶皱、撕裂等缺陷。前人虽曾通过调整 Metaball 参数、简单叠加、直接合并等来解决这些问题,但未能得到效果好,且效率高的满意结果,为此,在分析、研究了 Metaball 单独作用、作用范围重叠的基础上,分别针对点骨架、直线段、曲线段骨架,提出了线性加权和、代数混合、指数加权和的方法,用以处理多个 Metaball 在重叠区域的作用效果混合。实验表明,这些混合方法不但可与曲面的表示方法以及 Metaball 势函数的形式无关,而且在边界处的过渡较平滑,其效果与效率也得到了实例验证。

关键词 Metaball 骨架 混合 肿胀 褶皱

中图分类号: TP391.41 **文献标识码**: A **文章编号**: 1006-8961(2006)05-0695-05

Influence Blending of Metaballs in Overlap Area

LI Ling-feng, TAN Jian-rong, ZHAO Hai-xia

(State Key Laboratory of CAD&CG, Zhejiang University, Hangzhou 310027)

Abstract While implicit surface or surface deformation is represented by multiple metaballs, bulge, crease and tearing frequently appear in overlap area. Researchers tried to tackle the defect by means of adjusting parameters of metaball, simple superposition and direct union. However, they failed to reach expectant result. By the study on single metaball influence and multiple metaball influence overlap, the authors present several blending methods for point, line segment and curve segment skeleton respectively. The multiple metaball influence overlap blending methods include linear weight blend, algebraic blend, and exponent average blend. These blending methods are independent from the expressions of surfaces and the field function formula of metaball. Case studies show that the effect and efficiency of the suggested methods are satisfied.

Keywords metaball, skeleton, blending, bulge, crease

1 引言

基于 Metaball 混合作用的技术最早作为一种造型技术由 Blinn 提出^[1],称为点滴(blobs),或点滴单元(blobs molecules)。在日本, Nishimura 等人独立地开发了这项技术,称为元球(Metaball)。后来, Wyvill 等人也开发了一种基于势函数的显示方法^[2],称为软体(soft objects),而且用户能够规定每个 Metaball 中心的位置、中心的密度值以及势函数。大家知道,自 20 世纪 80 年代开始就较普遍地使用

元球造型作为一种隐式曲面造型技术,并通过用具有等势场值的点集来定义和表示曲面^[3,4],其任意一点的势值则由与空间特定点的距离来定义。早期元球的“核”或“骨架”仅有点,金小刚等人又扩展出线段、矩形、圆柱等形态骨架的广义元球,并用于约束变形^[3,5]。Paul Borrel 等人将 Metaball 作为约束来对已有形体实施几何变形^[6]。

Metaball 约束变形对空间点作用的最终效果取决于以下 4 个因素:距离 $r(P, C)$; 中心点 C 的特性; 势函数 $f(r(P, C))$ 的类型及性质; Metaball 的影响半径 R_i 。Metaball 在用于描绘隐式曲面时,研究

基金项目: 国家“863”高技术研究发展计划基金项目(2004A A84ts03); 浙江省科学技术厅项目(2004C31018)

收稿日期: 2004-06-03; **改回日期**: 2005-07-26

第一作者简介: 李凌丰(1965 ~), 男, 副教授, 2005 获浙江大学博士学位。主要研究方向为计算机图形学、工程问题可视化、曲面造型等。E-mail: lilf@mail.hz.zj.cn

者又给 Metaball 中心定义了密度特性,而作为变形控制时,球心的特性为位移,并且它是变形控制手段的关键因素之一^[7]。由于无论是用于隐式曲面定义,还是用于约束变形,若空间同时有多个 Metaball,则可能存在多个 Metaball 影响重叠的区域,在处理不当时,极易出现缺陷^[8],因此,在使用 Metaball 技术时,重叠区域的势值计算必须给予足够的重视,并应寻求适当的解决办法,以得到满意的效果。下面 3 个目标是必须关注的,但对于特定的合成方法,并不要求同时达到如下 3 个目标:

(1) 在重叠边缘提高曲面的连续性,需达到 C^1 、 G^1 或 C^2 、 G^2 连续,以避免出现肿胀;

(2) 保持在重叠区内混合函数的增减趋势与重叠区外一致;

(3) 峰值控制,在元球骨架处势值为该元球的最大值。

以前的研究者已意识到了重叠区域的势值计算问题,虽也采取了如调整 Metaball 的参数、简单叠加和直接合并等多种处理方法,但均未获得理想结果^[9]。这些方法简介如下:

(1) 调整 Metaball 的参数 选择需要的势函数类型,通过调整 Metaball 的参数来实现对合成效果的控制^[2]。虽然控制适当可以避免出现不理想的结果,但是要求列举每个元球不仅使得系统的复杂度增加,同时也限制了变化的范围;

(2) 简单叠加 Nishita 等许多研究者在确定多个骨架作用下空间点的势值时,是采用简单叠加的方法来求取各个骨架对空间点作用的和^[1],但有时会出现肿胀等不良现象;

(3) 直接合并 McCormack 对于 n 个直线骨架首先采用直接合并的方法^[9]来分别计算空间点与多个线段骨架 (Metaball) 的距离,然后取其中的最近距离用于计算点的势能^[7,10],通常,当骨架是凸起时,距离表面(曲面)是圆形的,当骨架是凹入时,则沿着上述曲线的上部,由于表面(或轮廓)切矢不连续,因此会出现皱折 (crease),可见这种方法也是不理想的。

2 Metaball 单独作用

假设只有一个元球约束 C_i ,若采用 Wyvill 的六次多项式作为势函数,则对位于元球约束作用半径范围之外的每点,其势函数 $f_i(r(P, C_i))$ 的值将为

零,也就是这些点在曲面变形时,不会移动,即位移矢量等于零^[11]。对于在元球约束作用半径范围内的一点 P ,其势函数有一非零值。这种情况下, P 点势值是骨架密度值的一个简单比例因子,该势值大小决定于它到元球骨架的距离。注意到势函数是单调递减的,并且在骨架处有最大值,但没有一点的势值大小会超过元球骨架的势值。

当一组元球约束是完全分离时,上述的结果仍然有效。这种情况下,空间的每一个点,或受一个约束的作用,或受其中的另一个约束作用。此时空间势值分布由一组 n 个完全分离的元球约束定义,也可看作是 n 个各自独立的元球(如图版 I 图 1 所示)。

3 多个 Metaball 作用的混合

3.1 多个 Metaball 作用范围重叠分析

现在分析多个 Metaball 约束作用同时存在影响范围重叠的情况。

通常情况下,作用是一对一的映射,即一组给定的元球约束,只能得出一个作用结果。当原始空间的同一个点用于定义两个约束时,曲面变形会出现异常情况,这会导致要求这点向两个不同方向运动 ($C_i = C_j$)。这种情况下,变形函数虽仍可以计算,但是两个约束中没有一个是能被满足。

若它们间的距离小于元球的作用半径: $\|C_i - P\| < R_i$,则说元球约束 C_i 作用于一点 P 。如果一对元球 C_i 与 C_j 相互作用(即相互作用元球骨架),则称之为非分离的;如果一对元球中的一个骨架受对方作用,而另一骨架不受对方作用,则称之为单向作用;如果一对元球相互之间不影响(即相互之间不影响元球骨架),则称之为分离的;如果它们的作用范围不重叠(图版 I 图 2 显示点骨架元球对),则称一对元球是完全分离的(图版 I 图 2(d));如果一组元球是两两分离的,则称该组元球是不完全分离的(图版 I 图 2(c))。

假设元球集 C 是分离的,则对于每个元球 C_j 有

$$r_i(C_j, C_i) = \|C_j - C_i\| = \begin{cases} > R & R = \max(R_i, R_j), j \neq i \\ 0 & j = i \end{cases} \quad (1)$$

从图版 I 图 2 可见,除非两个元球是完全分离的,否则它们之间就一定存在作用重叠区域。

3.2 多个 Metaball 作用的混合

如果将各个 Metaball 的作用效果简单叠加,则

在重叠区域会出现如下现象:

(1) 部分重叠处的势值大于骨架处的势值 尽管非重叠部分的物理意义是明确的,但重叠部分势值的物理意义不明确,而且会出现部分重叠处的势值大于骨架处势值的不合理情况;

(2) 出现肿胀现象 一个表面“肿胀”都有一个显示与潜在骨架有关的负、正、再负曲率的交切断面;

(3) 变形曲面可能被撕裂 利用多个元球作为约束来实施变形,当球心相距较近时,则平面或空间可能被撕裂。

图版 I 图 3(a) 所示为两个相交直线段骨架元球的势能场简单叠加,其等势面出现肿胀的现象。而如果将两个元球的势能场直接合并,则等势面会出现褶皱的现象,即表面切矢不连续(如图版 I 图 3(b) 所示)。图版 I 图 3(a)、图 3(b) 的右侧彩图用颜色分别表示了简单叠加和直接合并情况下,骨架所在平面的势值分布。

在存在影响重叠区域的情况下,为了消除肿胀或褶皱,以便获得受多个 Metaball 作用后的理想效果,对元球的作用必须形成某一种混合,而不是简单叠加或直接合并。

本小节先讨论势值计算中用到的距离,后面的小节再讨论几种混合方法。

若作用的合成效果由 n 个点骨架元球 $C_i (i=1, 2, \dots, n)$ 组成, $r_i(P, C_i)$ 为空间任一点 P 到某个元球中心点 C_i 的距离,则它定义为欧氏距离^[3],即

$$r_i(P, C_i) = \|P - C_i\|$$

若骨架是直线段,则在混合中,需要计算空间点到线段的距离。假设 P 点坐标为 (x, y, z) , 直线段端点 P_1 的坐标为 (x_1, y_1, z_1) , P_2 的坐标为 (x_2, y_2, z_2) , 则点 P 到直线 P_1P_2 的距离的平方为

$$d^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 - \frac{[(x_2 - x_1)(x - x_1) + (y_2 - y_1)(y - y_1) + (z_2 - z_1)(z - z_1)]^2}{[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]} \quad (2)$$

在确定点到空间任意直线骨架的距离 r 时,若点 P 不在骨架直线段 P_1P_2 上,则需要采用以下算法来判断距离的取值。参见图 1,假设 d 已由式(2)计算出, $\overline{PP_1}$ 是 P 点到 P_1 的距离, $\overline{PP_2}$ 是 P 点到 P_2 的距离。

$$\text{if } (\max(\overline{PP_1}, \overline{PP_2}))^2 > (\overline{P_1P_2})^2 \quad \text{then} \\ r = \min(\overline{PP_1}, \overline{PP_2})$$

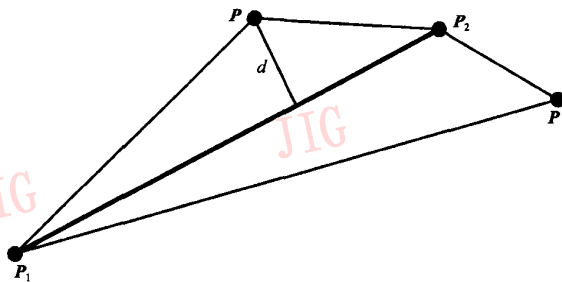


图 1 求空间点到任意直线段的距离 r

Fig. 1 Finding the distance r from a point to an arbitrary line segment

```
else
    r = d
end if
```

3.3 Metaball 作用的线性加权和

若两个元球 C_1 和 C_2 不是完全分离的(如图版 I 图 2(a), 图 2(b), 图 2(c) 所定义的情况), 则空间点同时受两元球作用的结果 $f(P)$ 是其贡献的线性加权平均和(参见图 2), 而权重则设为与距离有关的系数。

$$f(P) = t_1 q_1 f_1(r_1) + t_2 q_2 f_2(r_2) \quad (3)$$

其中, $t_1 + t_2 = 1$; $t_1 = (R_1 - r_1) / \Delta t$; $t_2 = (R_2 - r_2) / \Delta t$; $\Delta t = (R_1 - r_1) + (R_2 - r_2)$; $f_1(r_1)$ 和 $f_2(r_2)$ 分别为与两个元球对应的势函数, q_1 和 q_2 分别是两个元球核心的密度值, r_1 和 r_2 分别是点 P 到骨架 C_1 和 C_2 的距离, R_1 和 R_2 是元球 C_1 和 C_2 的影响半径, 并且在重叠区域, 满足 $r_1 < R_1$ 和 $r_2 < R_2$ 。

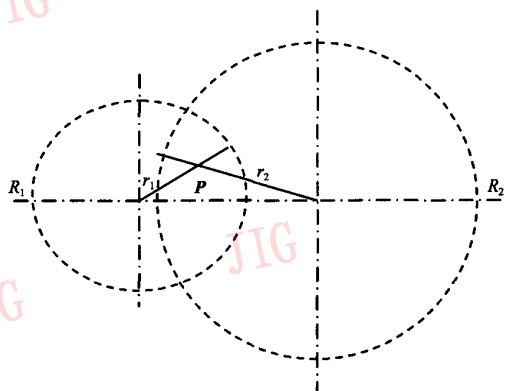


图 2 两点骨架元球作用合成示意图

Fig. 2 Blend of two point skeleton Metaball

另外, 还可以将 2 个元球的情况推广到 n 个元球, 考虑 n 个元球骨架 C_1, C_2, \dots, C_n 非完全分离的

情况,可以认为空间点同时受 n 个元球作用的效果是它们各自贡献的加权平均和,即

$$f(\mathbf{P}) = \sum_{i=1}^n t_i q_i f_i(r_i) \quad (4)$$

其中, $t_1 + t_2 + t_3 + \dots + t_n = 1$; $t_1 = (R_1 - r_1) / \Delta t$; $t_2 = (R_2 - r_2) / \Delta t$; $t_3 = (R_3 - r_3) / \Delta t$; \dots , $\Delta t = (R_1 - r_1) + (R_2 - r_2) + (R_3 - r_3) + \dots + (R_n - r_n)$; $f_1(r_1)$ 、 $f_2(r_2)$ 、 \dots 、 $f_n(r_n)$ 分别为与各个元球对应的势函数, q_1 、 q_2 、 \dots 、 q_n 分别是元球核心的密度值, R_1 、 R_2 、 \dots 、 R_n 是元球约束 C_1 、 C_2 、 \dots 、 C_n 的影响半径, r_1 、 r_2 、 \dots 、 r_n 是点 \mathbf{P} 分别到 C_1 、 C_2 、 \dots 、 C_n 的距离, 并且满足 $r_1 < R_1$ 、 $r_2 < R_2$ 、 \dots 、 $r_n < R_n$ 。

为对比简单叠加与线性加权的不同效果,图版 I 图 4 显示了这两种方法对两个点骨架元球作用的合成。由该图可见,线性加权和混合虽可以处理势函数形式不同和核心密度值不等的情况,也能够消除肿胀和褶皱,但是,当元球的影响半径很大时,将会导致骨架的某些局部细节的消失。

3.4 Metaball 作用的代数混合

如果采用如下的代数混合,则两个元球约束 C_1 和 C_2 就可根据 2 维混合函数 B 而结合在一起,而且每个元球约束的范围受参数设定值的控制。

$$f(\mathbf{P}) = B(C_1(\mathbf{P}), C_2(\mathbf{P})) \\ = \left[1 - \frac{r_1}{R_1} \right]_+^t q_1 f_1(r_1) + \left[1 - \frac{r_2}{R_2} \right]_+^t q_2 f_2(r_2) \quad (5)$$

其中, r_1 和 r_2 是点 \mathbf{P} 到骨架元素 1 和元素 2 的代数距离, R_1 和 R_2 是骨架 C_1 和 C_2 的影响范围半径, $[x]_+$ 是 $\max(0, x)$, t 是指数参数。 q_1 和 q_2 分别是两个元球核心的密度值。

影响范围半径参数 R_1 和 R_2 决定了混合曲面到原元球的衔接点,在离开元球作用范围边界处即是与其他元球的衔接点。而在影响重叠区域内,作用势值是两个元球的共同势值的近似。从图 3 可以看到,当 $t=2$ 时,在两元球作用的重叠区域内,混合的表面位于元球合并区域之外。

考虑图版 I 图 3 所示的两相交直线段骨架情况,当 $t=3$ 时,则混合 $f(\mathbf{P}) = B(C_1(\mathbf{P}), C_2(\mathbf{P}))$ 的效果如图版 II 图 5 所示,图版 II 图 5 左侧所示为两个相交直线段骨架元球的势能场经过代数混合得到的等势面,右侧的彩图用颜色表示了代数混合情况下骨架所在平面的势值分布。由该图可以看出,没有出现肿胀或褶皱现象,混合效果明显比图版 I 图 3 所示情况好。

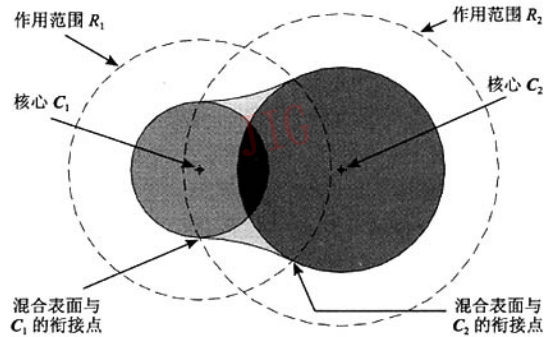


图 3 代数混合
Fig. 3 Algebraic blend

式(5)的混合可以扩展到 n 个骨架:

$$f(\mathbf{P}) = \sum_{i=1}^n \left[1 - \frac{r_i}{R_i} \right]_+^t q_i f_i(r_i)$$

骨架从功能上可以成对组合,但有时也希望对骨架以任意顺序进行独立的评估,因为这种独立性不仅能简化实现、提高可延展性,而且不影响对象设计。但是,由于代数混合方法对势函数的形式有要求,因而不仅给使用带来了束缚,也对选用骨架作用混合方法带来了限制。

3.5 Metaball 作用的指数加权和

下面通过求指数的加权平均来获得两个 Metaball 作用的合成结果。设 $q_1 f_1(r_1)$ 和 $q_2 f_2(r_2)$ 分别是两个 Metaball 各自在 \mathbf{P} 点的合成作用结果。两者在重叠区域的合成作用结果为 $f(\mathbf{P})$, 设

$$t_1 = r_1/R_1, \quad t_2 = r_2/R_2$$

其中, R_1 和 R_2 是元球 C_1 和 C_2 的影响半径, r_1 和 r_2 是点 \mathbf{P} 分别到 C_1 和 C_2 的距离。在 C_1 和 C_2 影响的重叠区域,满足 $0 < r_1 < R_1$ 和 $0 < r_2 < R_2$, 即有 $0 < t_1 < 1$ 和 $0 < t_2 < 1$ 。指数加权和混合函数为

$$f(\mathbf{P}) = [q_1 f_1(r_1) (1 - e^{t_2(1+t_1)}) (1 - t_1) + q_2 f_2(r_2) (1 - e^{t_1(1+t_2)}) (1 - t_2)] / [(1 - e^{t_1+t_2}) (1 - t_1 t_2)] \quad (6)$$

该调和函数有如下性质:

$$t_1 = 0 \text{ 时, } f(\mathbf{P}) = q_1 f_1(r_1)$$

$$t_2 = 0 \text{ 时, } f(\mathbf{P}) = q_2 f_2(r_2)$$

$$t_1 = 1 \text{ 时, } f(\mathbf{P}) = q_2 f_2(r_2)$$

$$t_2 = 1 \text{ 时, } f(\mathbf{P}) = q_1 f_1(r_1)$$

由于该指数加权和混合函数能够达到前文所提出的 3 个目标,其不仅是对称的,也能控制峰值,因而是一个较理想的混合函数。

4 实验举例

在需要使用多个骨架元球作用的情况下,为了避免骨架作用的相互影响,可将骨架约束尽可能地依次加入或者调整其影响半径。当存在重叠区域时,则可采用适当的混合方法来控制其效果,实践证明重叠区域内 Metaball 作用效果的混合方法可以用于隐式曲面造型和曲面变形的多种场合,下面是一些具体应用例子。

图版 II 图 6 表示由 19 个点骨架元球混合而组成“S”形。图版 II 图 7 上图是以两条直线段为骨架生成的隐式曲面,若将这两条骨架直线段在共直线的位置上首尾连接,则所得到的合成隐式曲面如图版 II 图 7 下图所示。图版 II 图 8 则是一段正弦曲线骨架与一段直线骨架连接的结果。

图版 II 图 9 是两条曲线的分支情况,较短的一条从较长的一条中间分支出来。图版 II 图 10 所示为多于 2 个直线段骨架元球混合的结果,该图显示 5 条直线段骨架的元球从一点分支,它们有作用的重叠区域,若采用代数混合方法,则得到的结果比较理想。图版 II 图 11 显示了 4 条空间曲线段分支的情形。

5 结论

本文提出的 Metaball 重叠区域作用混合方法不仅数学原理简要明晰,而且易于控制,重复使用可获得丰富的曲面形状。另外还可以做到混合方法与曲面的表示方法以及势函数形式无关,不仅在重叠区域边界处与原有势值过渡都较平滑,而且对点、直线、曲线等骨架都适用。

同时,这些针对不同的骨架情形提出的作用混合方法,在不同情况下具有以下不同的表现:(1)线

性加权和方法适用于点骨架;(2)当势函数具有与混合函数相同的形式时,代数混合方法效果较好;(3)指数加权和,同单独作用时一样,与任一骨架距离为零的点处具有最大的势值。

参考文献 (References)

- 1 Nishita T, Nakamae E. A method for displaying meatballs by using Bezier clipping [J]. Computer Graphics Forum, 1994, 13 (3): 271 ~ 280.
- 2 Wyvill B, Wyvill G. Field functions for implicit surfaces [J]. The Visual Computer, 1989, 5(1&2): 75 ~ 82.
- 3 JIN Xiao-gang, PENG Qun-sheng. General Constrained Deformations Based on Generalized Metaballs [J]. Journal of Software, 1998, 9(9): 677 ~ 682. [金小刚, 彭群生. 基于广义元球的一般约束变形 [J]. 软件学报, 1998, 9(9): 677 ~ 682.]
- 4 Bloomenthal J, Wyvill B. Interactive techniques for implicit modeling [J]. Computer Graphics, 1990, 24(2): 109 ~ 115.
- 5 JIN Xiao-gang, LI You-fu, PENG Qun-sheng. General constrained deformations based on generalized meatballs [J]. Computers & Graphics, 2000, 24: 219 ~ 231.
- 6 Borrel P, Rappoport A. Simple constrained deformations for geometric modeling and interactive design [J]. ACM Transactions on Graphics, 1994, 13(2): 137 ~ 155.
- 7 FANG Xiang, BAO Hujun, Heng Pheng Ann, et al. Continuous field based free-form surface modeling and morphing [J]. Computers & Graphics, 2001, 25: 235 ~ 243.
- 8 Bloomenthal J. Bulge elimination in convolution surface [J]. Computer Graphics Forum, 1997, 16(1): 31 ~ 41.
- 9 McCormack J, Sherstyuk A. Creating and rendering convolution surfaces [J]. Computer Graphics Forum, 1998, 17(2): 113 ~ 120.
- 10 Cani-Gascuel M P, Desbrun M. Animation of deformable models using implicit surface [J]. IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics, 1997, 3(1): 39 ~ 50.
- 11 LI Ling-feng, TAN Jian-rong, ZHANG Qian. Character study of Metaball field functions [J]. Journal of Zhejiang University (Science Edition), 2004, 31(4): 404 ~ 408. [李凌丰, 谭建荣, 张谦. Metaball 势函数的若干性质研究 [J]. 浙江大学学报, 2004, 31(4): 404 ~ 408.]